

第3讲全等三角形基本辅助线

1. 辅助线作图方法

添加辅助线的基本作图方法：

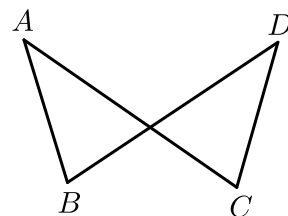
- (1)连接两点.
- (2)延长某条线段，使延长线的长度与原线段的长度成某种数量关系.
- (3)延长某条线段，与另一条线交于一点.
- (4)在某条线段上，截取长为固定值的一部分，连接截取部分端点与另一点.
- (5)过某点，作另一条线的平行线或垂线.

一、连接

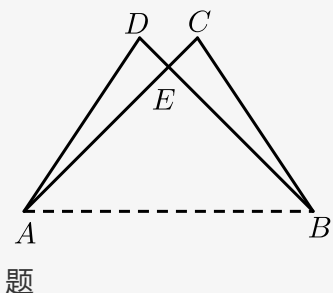
🍌 举个“栗”子

栗子1

1. 已知：如图， $AB = DC$ ， $AC = BD$ 。
求证： $\angle B = \angle C$ 。



【备注】



见到左图所示的图形，通常连接AB这条公共边，再利用全等解

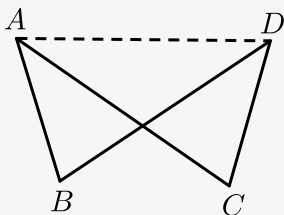
【答案】证明见解析。

【解析】如图，连接AD，
在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle DCA$ 中，

$$\begin{cases} AB = CD \\ AC = BD, \\ AD = DA \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle DCA$ (SSS) ,

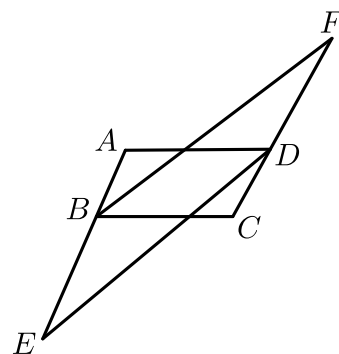
$\therefore \angle B = \angle C$.



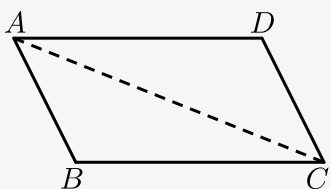
【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

栗子2

2. 已知如图： $AD = BC$, $FD = EB$, $AB = CD$. 求证： $\angle E = \angle F$.



【备注】



见到左图所示的图形（平行四边形），通常连接对角线，再利

用全等解题，此题用同样的方法连接BD

【答案】证明见解析 .

【解析】连接BD ,

$$\because AB = CD , BE = DF ,$$

$$\therefore AB + BE = CD + DF ,$$

$$\text{即 } AE = CF ,$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 和 } \triangle CDB \text{ 中 } \begin{cases} AB = CD \\ AD = CB , \\ BD = DB \end{cases}$$

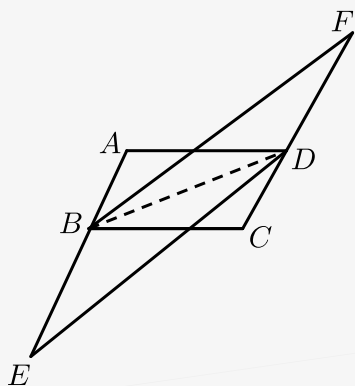
$$\triangle ABD \cong \triangle CDB \text{ (SSS) },$$

$$\therefore \angle A = \angle C ,$$

$$\text{在} \triangle AED \text{和} \triangle CFB \text{中} \begin{cases} AE = FC \\ \angle A = \angle C , \\ AD = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle CFB \text{ (SAS) },$$

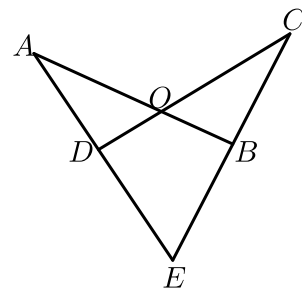
$$\therefore \angle E = \angle F .$$



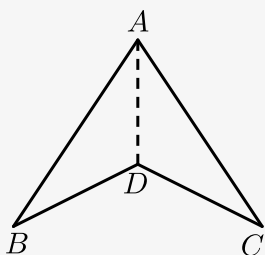
【标注】【知识点】多解或多种判定混合

栗子3

3. 如图，已知线段 AB 、 CD 相交于点 O ， AD 、 CB 的延长线交于点 E ， $OA = OC$ ， $EA = EC$ ，请说明 $\angle A = \angle C$ 。



【备注】

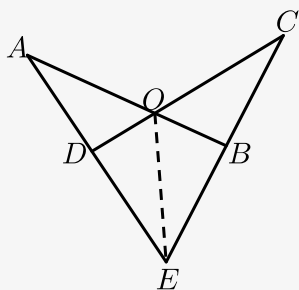


见到左图所示的图形，通常连接 AD 这条公共边，再利用全等解题，

此题用同样的方法连接 OE

【答案】证明见解析。

【解析】连接 OE ,



在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COE$ 中,

$$\begin{cases} AO = CO \\ AE = CE, \\ OE = OE \end{cases}$$

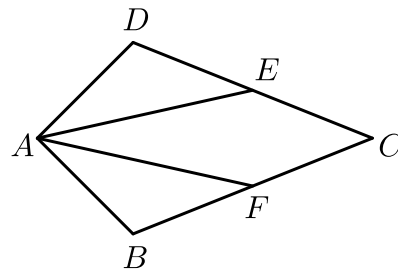
$\triangle AOE \cong \triangle COE$ (SSS),

$\therefore \angle A = \angle C$.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

4. 已知: 如图所示, $AB = AD$, $BC = DC$, E , F 分别是 DC 、 BC 的中点.

求证: $AE = AF$.



【备注】第3题的延伸, 先连接 AC 判定大全等, 再判定小全等

【答案】证明见解析.

【解析】连接 AC ,

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ACB$ 中,

$$\begin{cases} AD = AB \\ AC = AC, \therefore \triangle ACD \cong \triangle ACB \text{ (SSS)}, \\ CD = BC \end{cases}$$

$\therefore \angle ACE = \angle ACB$,

$\therefore BC = DC$,

E , F 分别是 DC , BC 的中点,

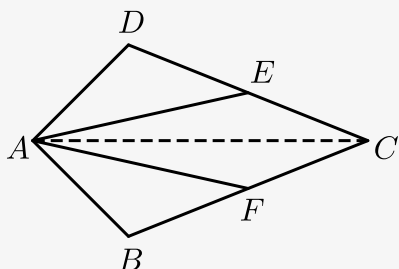
$\therefore CE = CF$,

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle ACF$ 中,

$$\begin{cases} CE = CF \\ \angle ACE = \angle ACF, \\ AC = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle ACF (\text{SAS}),$

$\therefore AE = AF.$



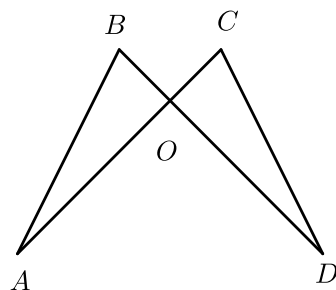
【标注】【知识点】多解或多种判定混合

二、延长

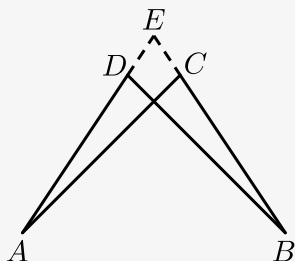
🔔 举个“栗”子

栗子4

5. 如图所示, $AC = DB$, $\angle B = \angle C$, 求证: $AB = CD$.



【备注】

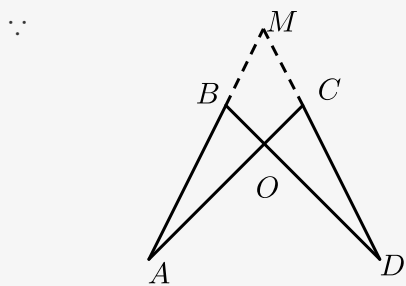


用 $\angle E$ 为公共角解题

见到左图所示的图形, 通常延长AD, BC两条线找到交点, 再利

【答案】证明见解析.

【解析】延长AB、DC相交于点M,



$$\angle ABD = \angle DCA,$$

$$\therefore \angle DBM = \angle ACM.$$

在 $\triangle DBM$ 和 $\triangle ACM$ 中,

$$\begin{cases} \angle M = \angle M \\ \angle DBM = \angle ACM, \\ DB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DBM \cong \triangle ACM \text{ (AAS)}.$$

$$\therefore DM = AM, MB = MC.$$

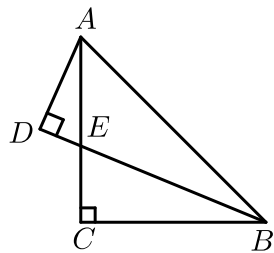
$$\therefore AM - BM = DM - CM,$$

$$\therefore AB = CD.$$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】AAS

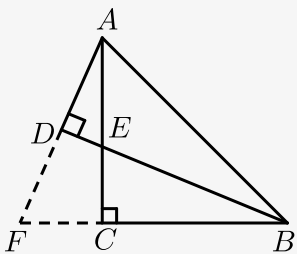
6. 如图所示, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, $\angle ACB = 90^\circ$, BD 为 $\angle ABC$ 的平分线, $AD \perp BD$.
求证: $BE = 2AD$.



【备注】第5题的延伸, 用同样的技巧构造点F, 再利用两次全等推导线段关系
可以结合学生程度, 铺垫一下双垂直模型

【答案】证明见解析.

【解析】如图所示, 延长 AD , 交 BC 的延长线于点 F ,



在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle BFD$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABD = \angle FBD \\ BD = BD \\ \angle BDA = \angle BDF = 90^\circ \end{cases},$$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle BFD (\text{ASA})$,

$\therefore AD = DF$ ，即 $AF = 2AD$ 。

$\because \angle F + \angle FBD = 90^\circ$ ， $\angle BEC + \angle FBD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle F = \angle BEC$ 。

在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCE$ 中， $\begin{cases} \angle F = \angle BEC \\ \angle ACF = \angle BCE = 90^\circ \\ AC = BC \end{cases}$ ，

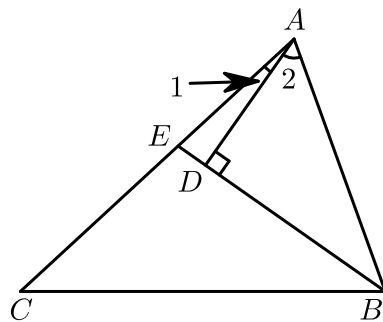
$\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCE (\text{AAS})$ ，

$\therefore BE = AF = 2AD$ 。

【标注】【知识点】角分线有关的辅助线

栗子5

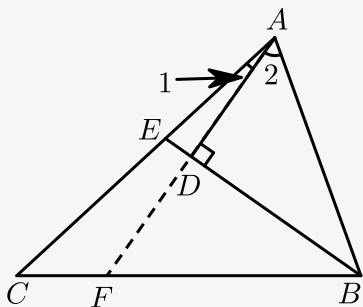
7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BE 是 $\angle ABC$ 的角平分线， $AD \perp BE$ ，垂足为 D 。求证： $\angle 2 = \angle 1 + \angle C$ 。



【备注】与角平分线结合，可以把已知垂直的线段进行延长，再利用外角性质倒角

【答案】证明见解析。

【解析】如图，延长 AD 交 BC 于 F 。



因为 $\angle ABD = \angle FBD$, $BD = BD$,

$\angle ADB = \angle FDB = 90^\circ$,

所以 $\text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle FBD (\text{ASA})$.

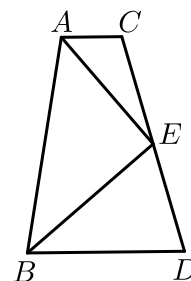
于是 $\angle 2 = \angle DFB$.

因为 $\angle DFB = \angle 1 + \angle C$,

所以 $\angle 2 = \angle 1 + \angle C$.

【标注】【知识点】延长构造对称

8. 如图, $AC \parallel BD$, E 为 CD 的中点, $AE \perp BE$.



(1) 求证: AE 平分 $\angle BAC$, BE 平分 $\angle ABD$.

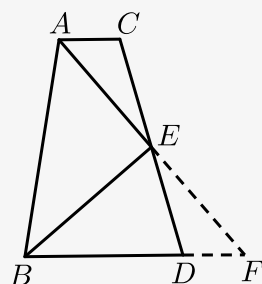
(2) 线段 AB 、 AC 、 BD 有怎样的数量关系? 请写出你的结论并证明.

【备注】第7题的延伸, 题目除利用角平分的性质外, 还要结合平行加中点模型推导全等

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $AB = BD + AC$; 证明见解析.

【解析】(1) 如图所示, 延长 AE 交 BD 的延长线于 F ,



$\because AC \parallel BD$,
 $\therefore \angle CAE = \angle DFE$,
 $\because E$ 为 CD 的中点 ,
 $\therefore CE = DE$,
 在 $\triangle CAE$ 和 $\triangle DFE$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle CAE = \angle DFE \\ \angle AEC = \angle FED , \\ CE = DE \end{cases}$$
 $\therefore \triangle CAE \cong \triangle DFE (AAS)$,
 $\therefore AC = DF$, $AE = FE$,
 $\because AE \perp BE$,
 $\therefore \angle AEB = \angle FEB = 90^\circ$,
 在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle FEB$ 中 ,

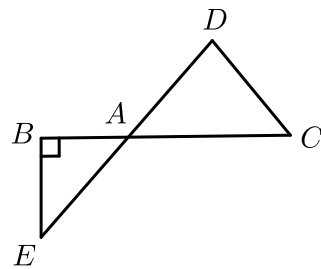
$$\begin{cases} AE = FE \\ \angle AEB = \angle FEB , \\ BE = BE \end{cases}$$
 $\therefore \triangle AEB \cong \triangle FEB (SAS)$,
 $\therefore \angle BAE = \angle F$, $\angle ABE = \angle FBE$,
 $\therefore \angle CAE = \angle BAE$,
 $\therefore AE$ 平分 $\angle BAC$, BE 平分 $\angle ABD$.
 (2) 由 (1) 可得 , $\triangle AEB \cong \triangle FEB$,
 $\therefore AB = BF$,
 即 $AB = BD + DF$,
 由 (1) 可得 , $DF = AC$,
 $\therefore AB = BD + AC$.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

三、 做垂直

栗子6

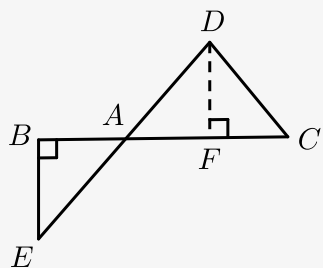
9. 如图 , $\angle B = 90^\circ$, $AE = AD$, 若 $BE = 2$, $AC = 4$, 则 $S_{\triangle ADC} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【备注】从面积的角度引入做垂线的意识，再利用全等性质解题

【答案】4

【解析】如图，过D作 $DF \perp AC$ ，可证明 $\triangle ABE \cong \triangle AFD$ (AAS)，可得 $DF = BE = 2$ 。

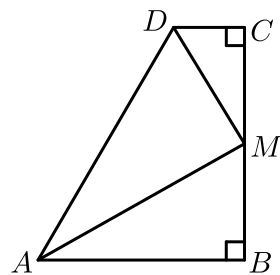


$$\text{故 } S_{\triangle ADC} = \frac{AC \times DF}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4.$$

【标注】【知识点】三角形的周长与面积问题；构造简单辅助线证明全等

栗子7

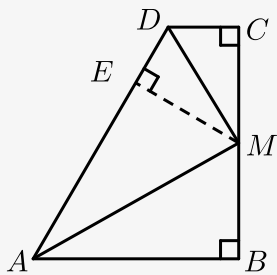
10. 如图所示， $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ，M是BC的中点，AM平分 $\angle DAB$ ，求证：DM平分 $\angle ADC$ 。



【备注】引导学生当题目中已给垂直，可以做另一个垂直再推导全等

【答案】证明见解析。

【解析】如图，过点M作 $ME \perp AD$ 于点E。



$\because \angle B = \angle C = 90^\circ$,
 $\therefore MB \perp AB$, $MC \perp CD$.
 $\because AM$ 平分 $\angle DAB$, $ME \perp AD$, $MB \perp AB$,
 $\therefore EM = BM$.
 $\because M$ 是 BC 的中点 ,
 $\therefore CM = BM$.
 $\therefore CM = EM$.
 $\because MC \perp CD$, $ME \perp AD$,
 $\therefore DM$ 平分 $\angle ADC$.

【标注】【知识点】角分线性定理